Proof of the Prime Number Theorem

素数定理の証明

Rune Rin Hodge

ホッジルネ倫

Kyoto Prefectural Rakuhoku High School, 59 Shimogamo-Umenokicho, Sakyo-ku, Kyoto, Kyoto 606-0851, Japan

京都府立洛北高等学校（〒606-0851 京都府京都市左京区下鴨梅ノ木町59)

Abstract

The aim of this article is to introduce Newman's proof of the prime number theorem, which describes the asymptotic distribution of prime numbers. Newman's proof is non-elementary but the prime number theorem can be proven very shortly and elegantly with few materials from complex analysis.

Key words: Prime number theorem, Analytical proof, Riemann zeta function, Newman, Zagier

要旨

素数の漸近的分布に関する定理である素数定理の証明をNewman による方法を用いて紹介することを目的としている．初等的な証明ではないが複素関数論の利用を最小限にとどめた非常に優れた短い素数定理の証明である．

重要語句：素数定理，解析的証明，リーマンゼータ関数，ニューマン，ザギエ

序論

素数はシンプルな定義ながら驚くほど規則や性質がない．素数定理は，そんな素数について，おおまかな素数の分布を見出したものである．具体的には，ある正数xを用意してそのxに等しいもしくはそれ未満の素数の数は，xを大きくしていくと限りなく$x/\log(x)$に近づいていくという定理である．厳密には

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\pi(x)\log x}{x}=1$$

と表される．ここで，$\pi(x)$とはxを超えない素数の数を表す関数である．この式の左辺は収束が非常に遅く，$x=10^{25}$でも（右辺の 1 より）2 パーセントの誤差がある．

素数定理は 1792 年，ガウスが初めて実験的に気づいたといわれている．その約 100 年後，1896 年にアダマール，プーサンによって初めて証明された．それからさまざまな証明方法で示されてきたが, どれも複素解析関数の理論を使うものだった．そんな中, 1949 年, アトル - セルバーグ, ポール - エルディシュが初めてそのような理論を使わない初等的手法で証明した．

この論文では，数ある証明のうち，ニューマンによる簡潔な論文を元に素数定理を示していく．

素数定理とその証明

素数定理：

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\pi(x)\log x}{x}=1$$

この論文で用いる関数を定義しておく．なお，以下では p は素数全体をはしるとする．

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$$

$$\Phi(s)=\sum_{p}\frac{\log p}{p^s}$$

$$\theta(x)=\sum_{p\le x}\log p$$

素数定理を示すためのいくつかの命題を提示する．

命題 1 $\zeta(s)-\frac{1}{s-1}$ は正則関数として $\mathrm{Re}(s)>0$ に拡張できる．

命題 2 $\Phi(s)-\frac{1}{s-1}$ は $\mathrm{Re}(s)\ge 1$ に正則関数として拡張できる．

命題 3 $\theta(x)=O(x)$ である．

命題 4 $\int_1^{\infty}\frac{\theta(x)-x}{x^2}dx$ は収束する．

命題 5 $\theta(x)\sim x$である．

内容に関する連絡先：
常見俊直（京都大学大学院理学研究科社会交流室）
tsunemi@sci.kyoto-u.ac.jp

Correspondence Researcher:
Tsunemi, T.（tsunemi@sci.kyoto-u.ac.jp)
Graduate School of Science, Kyoto University

命題１の証明

もし Re(s) > 1 ならば,

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^s}dx = \left[\frac{1}{(1-s)x^{s-1}}\right]_1^\infty = \frac{1}{s-1}$$

$$\therefore\ \frac{1}{s-1} = \int_1^\infty \frac{1}{x^s}dx$$

より,

$$\zeta(s) - \frac{1}{s-1} = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s} - \int_1^\infty \frac{1}{x^s}dx$$

$$= \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s} - \int_n^{n+1}\frac{1}{x^s}dx = \sum_{n=1}^\infty \int_n^{n+1}\frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s}dx$$

$$= \sum_{n=1}^\infty \int_n^{n+1}\int_n^x \frac{s}{t^{s+1}}dt\,dx$$

$$\left|\int_n^{n+1}\int_n^x \frac{s}{t^{s+1}}dt\,dx\right| = \left|s\int_n^{n+1}\int_n^x \frac{1}{t^{s+1}}dt\,dx\right|$$

$$\leq |s|\int_n^{n+1}\int_n^x \left|\frac{1}{t^{s+1}}\right|dt\,dx$$

$$\leq |s|\int_n^{n+1}\int_n^{n+1} \frac{1}{t^{\mathrm{Re}(s)+1}}dt\,dx$$

ここで t は $n\leq t\leq n+1$ なので,

$$n^{\mathrm{Re}(s)+1} \leq t^{\mathrm{Re}(s)+1}$$

$$\therefore\ \frac{1}{t^{\mathrm{Re}(s)+1}} \leq \frac{1}{n^{\mathrm{Re}(s)+1}}$$

より,

$$\int_n^{n+1}\int_n^{n+1} \frac{s}{t^{\mathrm{Re}(s)+1}}dt\,dx$$

$$\leq |s|\int_n^{n+1}\int_n^{n+1} \frac{1}{n^{\mathrm{Re}(s)+1}}dt\,dx$$

$$= \frac{|s|}{n^{\mathrm{Re}(s)+1}}$$

よって,

$$\sum_{n=1}^\infty \left|\int_n^{n+1}\int_n^{n+1} \frac{s}{t^{\mathrm{Re}(s)+1}}dt\,dx\right| \leq \sum_{n=1}^\infty \frac{|s|}{n^{\mathrm{Re}(s)+1}}$$

$$= |s|\zeta(\mathrm{Re}(s)+1)$$

$\zeta(s)$ は s>1 の範囲で収束することが知られている．よって $|s|\zeta(Re(s)+1)$ は $Re(s)>0$ の範囲で収束する．これで $\zeta(s)-\frac{1}{s-1}$ を Re $(s)>0$ の範囲に定義域を広げられた.

命題２の証明

$\zeta(s) - \frac{1}{s-1}$ は Re $(s) > 0$ で正則である.

より,

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \sum_{n=0}^\infty a_n\,(s-1)^n$$

と書ける.

また、

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}$$

となることが知られている．よって,

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\sum_p \frac{\log p}{p^s - 1}$$

$$= -\sum_p \frac{\log p}{p^s} - \sum_p \frac{\log p}{(p^s-1)p^s}$$

$$= -\Phi(s) - \sum_p \frac{\log p}{(p^s-1)p^s}$$

ここで $\sum_p \frac{\log p}{(p^s-1)p^s}$ はRe$(s) > \frac{1}{2}$ で収束することが知られている.

さて,

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \sum_{n=0}^\infty a_n\,(s-1)^n$$

を項別微分してもよいことを認めると,

$$\zeta'(s) = -\frac{1}{(s-1)^2} + \sum_{n=0}^\infty na_n\,(s-1)^{n-1}$$

$$(s-1)\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$$

$$= (s-1)\frac{-\frac{1}{(s-1)^2} + \sum_{n=0}^\infty na_n\,(s-1)^{n-1}}{\frac{1}{s-1} + \sum_{n=0}^\infty a_n\,(s-1)^n}$$

$$= \frac{-1 + \sum_{n=0}^\infty na_n\,(s-1)^{n+1}}{1 + \sum_{n=0}^\infty a_n\,(s-1)^{n+1}} \to -1\ \ (s\to 1)$$

$$\therefore\ \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \frac{1}{s-1}\ \text{は}\ s=1\ \text{で正則}.$$

よって,

$$\Phi(s)-\frac{1}{s-1}=-\left(\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}+\frac{1}{s-1}\right)$$
$$-\sum_p\frac{\log p}{(p^s-1)p^s}$$

となりここまでの結果から $\Phi(s)-\frac{1}{s-1}$ の $\mathrm{Re}(s)>\frac{1}{2}$ における極は存在するとしても $\zeta(s)$ の零点だけであると分かった.

以下，$\zeta(s)$ の零点が存在しないことを示す.
$\zeta(s)$ の零点は存在するとすれば $\mathrm{Re}(s)=1$ 上にある.

$$s=1+ai(a>0)$$

が $\zeta(s)$ の u 次（$u\geq 0$）の零点だったとする． 目標は $u=0$ を示すことである.
$s=1+2ai$ も v 次（$v\geq 0$）の零点だとする.
共役複素数を考えると，

$$\begin{aligned}n^{\bar{s}}&=e^{\left(\log n\left(\mathrm{Re}(s)-i\mathrm{Im}(s)\right)\right)}\\&=e^{(\log n)\mathrm{Re}(s)}(\cos\alpha-i\sin\alpha)\\&\left(\alpha=(\log n)\mathrm{Im}(s)\right)\\&=e^{(\log n)\mathrm{Re}(s)}\overline{(\cos\alpha+i\sin\alpha)}\\&=\overline{e^{(\log n)\mathrm{Re}(s)}(\cos\alpha+i\sin\alpha)}\\&=\overline{e^{(\log n)(\mathrm{Re}(s)+i\mathrm{Im}(s))}}=\overline{n^s}\end{aligned}$$

より

$$\overline{\zeta(s)}=\zeta(\bar{s})$$

となるため,「$\zeta(s)=0$ ならば $\zeta(\bar{s})=0$」である．したがって $s=1-ai$ は u 次の零点，$s=1-2ai$ は v 次の零点となる．ここで

$$\zeta(s)=\frac{1}{s-1}+a_0+a_1(s-1)+a_2(s-1)^2+\cdots$$

より $s=1\pm ai$ は極ではないので，$s=1\pm ai$ でのテイラー展開は対称性より

$$\begin{aligned}\zeta(s)=&\,b_u\left(s-(1\pm ai)\right)^u\\&+b_{u+1}\left(s-(1\pm ai)\right)^{u+1}\\&+b_{u+2}\left(s-(1\pm ai)\right)^{u+2}+\cdots\end{aligned}$$

とおける．また $s=1\pm 2ai$ でのテイラー展開も

$$\begin{aligned}\zeta(s)=&\,c_v\left(s-(1\pm 2ai)\right)^v\\&+c_{v+1}\left(s-(1\pm 2ai)\right)^{v+1}\\&+c_{v+2}\left(s-(1\pm 2ai)\right)^{u+2}+\cdots\end{aligned}$$

とおける. 各収束円内で項別微分可能してもよいことを認めると,

$$\zeta'(s)=-\frac{1}{(s-1)^2}+a_1+2a_2(s-1)+\cdots$$

$$\begin{aligned}\zeta'(s)=&\,ub_u\left(s-(1\pm ai)\right)^{u-1}\\&+(u+1)b_{u+1}\left(s-(1\pm ai)\right)^u\\&+(u+2)b_{u+2}\left(s-(1\pm ai)\right)^{u+1}\\&+\cdots,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\zeta'(s)=&\,vc_u\left(s-(1\pm 2ai)\right)^{v-1}\\&+(v+1)c_{u+2}\left(s-(1\pm 2ai)\right)^v\\&+(v+2)c_{v+2}\left(s-(1\pm 2ai)\right)^{v+1}\\&+\cdots\end{aligned}$$

となる．先ほど証明した通り，

$$\Phi(s)=-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}-\sum_p\frac{\log p}{(p^s-1)p^s}$$

である．両辺の $s\to 1,1\pm ai$,$1\pm 2ai$ の極限を利用して新たな関係式を作る．はじめに両辺に $\varepsilon(\varepsilon>0)$ をかけ，$s=1+\varepsilon$ を代入し $\varepsilon\to 0$ とする.
級数部分

$$\sum_p\frac{\log p}{(p^s-1)p^s}$$

が正則であることと，先ほどのローラン展開から

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\varepsilon\Phi(1+\varepsilon)$$

$$=\lim_{\varepsilon\to+0}\left(-\varepsilon\frac{\zeta'(1+\varepsilon)}{\zeta(1+\varepsilon)}-\varepsilon\sum_p\frac{\log p}{(p^{1+\varepsilon}-1)p^{1+\varepsilon}}\right)$$

$$=-\lim_{\varepsilon\to+0}\varepsilon\frac{-\frac{1}{\varepsilon^2}+a_1+2a_2\varepsilon+\cdots}{\frac{1}{\varepsilon}+a_0+a_1\varepsilon+a_2\varepsilon^2+\cdots}+0=1$$

次に両辺に $\varepsilon(\varepsilon>0)$ をかけ，$s=1+\varepsilon\pm ai$
を代入し $\varepsilon\to 0$ とする．先ほどのテイラー展開から，同様に

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\varepsilon\Phi(1+\varepsilon\pm 2ai)=-v$$

である．ここで

$$\left(p^{\frac{ai}{2}}+p^{\frac{-ai}{2}}\right)^4=p^{2ai}+4p^{ai}+6+4p^{-ai}+p^{-2ai}$$

$$p^{\frac{ai}{2}}+p^{\frac{-ai}{2}}=2\mathrm{Re}\left(p^{\frac{ai}{2}}\right)$$

より,

$$\frac{\log p}{p^{1+\varepsilon}}\left(2\mathrm{Re}\left(p^{\frac{ia}{2}}\right)\right)^4=\frac{\log p}{p^{1+\varepsilon}}\left(p^{\frac{ia}{2}}+p^{\frac{-ia}{2}}\right)^4$$
$$=\frac{\log p}{p^{1+\varepsilon}}\left(p^{2ai}+4p^{ai}+6+4p^{-ai}+p^{-2ai}\right)$$
$$=\frac{\log p}{p^{1+\varepsilon-2ai}}+4\frac{\log p}{p^{1+\varepsilon+ai}}+6\frac{\log p}{p^{1+\varepsilon}}+4\frac{\log p}{p^{1+\varepsilon+ai}}$$
$$+\frac{\log p}{p^{1+\varepsilon+2ai}}$$

である．これを全ての素数 p について加えていくと

$$\sum_p\frac{\log p}{p^{1+\varepsilon}}\left(2\mathrm{Re}\left(p^{\frac{ia}{2}}\right)\right)^4$$
$$=\Phi(1-\varepsilon-2ai)+4\Phi(1+\varepsilon-ai)$$
$$+6\Phi(1+\varepsilon)+4\Phi(1+\varepsilon+ai)$$
$$+\Phi(1+\varepsilon+2ai)$$

となる．この式の左辺は正の実数となっている．両辺に $\varepsilon(\varepsilon>0)$ をかけ，$\varepsilon\to 0$ とすると右辺は次のように収束する．

$$-v-4u+6-4u-v=2(3-4u-v)$$

ゆえに左辺も収束し極限値は０以上の実数になる．
よって０以上の整数 u，v が $3-4u-v\geq 0$ を満たす．$u\geq 1$ では不合理なので $u=0$ とわかる．

<u>命題３の証明</u>

$\theta(x)=O(x)$ の証明

$$2^{2n}=(1+1)^{2n}$$

より，

$$2^{2n}={}_{2n}C_0+{}_{2n}C_1+\ldots\ldots$$
$$+{}_{2n}C_n+\ldots\ldots{}_{2n}C_{2n-1}+{}_{2n}C_{2n}$$

この右辺から ${}_{2n}C_n$ の項だけ取り出して評価すると，

$$2^{2n}\geq{}_{2n}C_n=\frac{(2n)(2n-1)\ldots(n+1)}{n(n-1)\ldots 1}$$

となる．ここで，${}_{2n}C_n$ は自然数なので，最右辺の分数は必ず約分されて分母が１になる．そのとき，$n+1\leq p\leq 2n$ の範囲にある素数 p は分母に含まれていないので，約分されずに残る．たとえば，n=8 なら，

$${}_{16}C_8=\frac{16\cdot 15\cdot 14\cdot 13\cdot 12\cdot 11\cdot 10\cdot 9}{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}$$
$$\geq 13\cdot 11$$

となる．一般に，

$$2^{2n}\geq\prod_{n+1\leq p\leq 2n}p$$

（$n+1\leq p\leq 2n$ を満たす素数の積）

$$2^{2n}\geq\prod_{n+1\leq p\leq 2n}p=e^{\log\left(\prod_{n+1\leq p\leq 2n}p\right)}$$

である．変形すると，

$$\log\left(\prod_{n+1\leq p\leq 2n}p\right)=\sum_{n+1\leq p\leq 2n}\log p$$

となる．

$$\theta(\mathrm{x})=\sum_{p\leq x}\log p$$

なので，

$$\sum_{n+1\leq p\leq 2n}\log p=\theta(2\mathrm{n})-\theta(\mathrm{n})$$

すなわち

$$2^{2n}\geq e^{\theta(2n)-\theta(n)}$$
$$\therefore 2n\log 2\geq\theta(2n)-\theta(n)$$

となる．ここで

$$n=2^{k-1}(k=1,2,3,\ldots)$$

とおくと

$$2^k\log 2\geq\theta(2^k)-\theta(2^{k-1})$$

となる．$k=1,2,3,\ldots,m$ を並べると，

$$2\log 2\geq\theta(2)-\theta(1)$$
$$2^2\log 2\geq\theta(2^2)-\theta(2)$$
$$2^3\log 2\geq\theta(2^3)-\theta(2^2)$$
$$\cdots$$
$$2^m\log 2\geq\theta(2^m)-\theta(2^{m-1})$$

となる．これらを左辺同士，右辺同士で全て足すと，

$$(2+2^2+2^3+\cdots+2^m)\log 2\geq\theta(2^m)$$

となる．等比数列の公式により，

$$2+2^2+2^3+\cdots+2^m=\frac{2(2^m-1)}{2-1}=2^{m+1}-2$$
$$<2^{m+1}$$

となるので，これを代入すると，

$$\theta(2^m)\leq 2^{m+1}\log 2\quad(*)$$

となる．ここで $x \geq 1$ を満たす正数 x に対し，

$$2^m \leq x < 2^{m+1}$$

となる自然数mが存在する．$\theta(x)$ は増加関数なので，
$0 \leq \theta(x) \leq \theta(2^{m+1})$である．これと (∗) を用いると，

$$0 \leq \theta(x) \leq \theta(2^{m+1}) \leq 2^{m+2} \log 2$$

が成り立つ．さらに，$2^m \leq x$ を代入すると，

$$0 \leq \theta(x) \leq 2^{m+2} \log 2 \leq (4\log 2)x$$

これはすなわち

$$\theta(x) = \mathrm{O}(x)$$

ということである．

命題４の証明

広義積分

$$\int_1^\infty \frac{\theta(x) - x}{x^2} dx$$

が収束することを示す．
そのために次の定理を示す．

定理：
関数 $f(t)$ は $t \geq 0$ で有界かつ局所可積分とし，
関数 $g(z)$ を次のように定義する．

$$g(z) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-zt} dt \quad (\mathrm{Re}(z) > 0)$$

この $g(z)$ が $\mathrm{Re}(z) \geq 0$ に正則関数として拡張できるとき，

$$g(0) = \int_0^\infty f(t)\, dt$$

が成り立つ．

では示していく．$g_T(z)$ を

$$g_T(z) = \int_0^T f(t)\, e^{-zt} dt$$

と定義する．

$$\lim_{T\to\infty} g_T(z) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-zt} dt = g(z)$$

なので

$$\lim_{T\to\infty} g_T(0) = g(0)$$

を示せばこの定理は証明される．

$f(t)$ は局所可積分なので $f(t)e^{-zt}$ も積分可能．このとき，積分計算の順序交換を認めると，任意の閉曲線 C について，

$$\int_C g_T(z) = \int_C \left(\int_0^T f(t)e^{-zt} dt\right) dz$$
$$= \int_0^T f(t) \left(\int_C e^{-zt}\, dz\right) dt$$

となる．e^{-zt} は複素数平面全体で正則なので

$$\int_C e^{-zt}\, dz = 0$$

である．
よって

$$\int_C g_T(z) = \int_0^T f(t) \cdot 0 dt = 0$$

となり，C は任意なのでコーシーの積分定理から $g_T(z)$ は複素数平面全体で正則であることがわかる．
$g(z)$ は $\mathrm{Re}(z) = 0$ で正則なので$\mathrm{Re}(z) = 0$上のそれぞれの点でテイラー展開できる．つまりそのそれぞれの点からの収束円内も正則である．それら収束円と $\mathrm{Re}(z) \geq 0$ の領域で正則．その領域に含まれるように

$$|z| \leq R \text{ かつ } \mathrm{Re}(z) \geq -\delta$$

となる十分大きい R と十分小さい δ を取れる．この $|z| \leq R$ かつ $\mathrm{Re}(z) \geq -\delta$ の領域の境界線を C とおく．この C の領域内で $g(z)$ も $g_T(z)$ も正則なので

$$(g(z) - g_T(z))e^{zT}\left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right)$$

は正則．よってコーシーの積分公式により，

$$\left(g(0) - g_T(0)\right)e^{0T}\left(1 + \frac{0^2}{R^2}\right) = g(0) - g_T(0)$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_C (g(z) - g_T(z))e^{zT}\left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right)\frac{dz}{z}$$

ここで，C のうち $\mathrm{Re}(z) > 0$ の領域を C_+, $\mathrm{Re}(z) < 0$ の領域を C_- とする．
$f(t)$ は $t \geq 0$ で有界なので，

$$B = (t \geq 0 \text{ での } |f(t)| \text{ の最大値})$$

とおける．
C_+ に沿っての積分

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_+} (g(z) - g_T(z))e^{zT}\left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right)\frac{dz}{z}$$

を考える．
これの被積分関数の絶対値を評価していく．前半は，

$$
\begin{aligned}
|g(z)-g_T(z)| &= \left|\int_T^{\infty} f(t)\, e^{-zt} dt\right| \\
&\le B\left|\int_T^{\infty} e^{-zt}\, dt\right| \\
&\le B\int_T^{\infty} e^{-\mathrm{Re}(z)t}\, dt \\
&= \frac{B}{\mathrm{Re}(z)} e^{-\mathrm{Re}(z)T}
\end{aligned}
$$

となる．後半は $z = Re^{i\theta}$ とおくと

$$
\begin{aligned}
\left|e^{zT}\left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)\frac{1}{z}\right| &= e^{\mathrm{Re}(z)T}\left|\frac{1+e^{2i\theta}}{Re^{i\theta}}\right| \\
&= \frac{e^{\mathrm{Re}(z)T}}{R}\left|e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right| \\
&= \frac{2e^{\mathrm{Re}(z)T}}{R^2}\mathrm{Re}(z)
\end{aligned}
$$

となる．よって，C_+ に沿った線積分の評価は，

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{C_+}\big(g(z)-g_T(z)\big)e^{zT}\left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)\frac{dz}{z}\right| \\
&\le \frac{1}{2\pi}\int_{C_+}\left|\big(g(z)-g_T(z)\big)e^{zT}\left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)\frac{1}{z}\right||dz| \\
&\le \frac{1}{2\pi}\int_{C_+}\frac{B}{Re(z)}e^{-\mathrm{Re}(z)T}\cdot\frac{2e^{\mathrm{Re}(z)T}}{R^2}\mathrm{Re}(z)|dz| \\
&= \frac{B}{\pi R^2}\int_{C_+}|dz| = \frac{B}{\pi R^2}\cdot\pi R = \frac{B}{R}
\end{aligned}
$$

となる．次は C_- に沿った線積分

$$
\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{C_-}\big(g(z)-g_T(z)\big)e^{zT}\left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)\frac{dz}{z}\right|
$$

を考える．２つに分けて，

$$
\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{C_-} g(z)e^{zT}\left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)\frac{dz}{z}\right|
$$

$$
\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{C_-} g_T(z)e^{zT}\left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)\frac{dz}{z}\right|
$$

をそれぞれ考える．
　後者において，$g_T(z)$ は複素数平面全体で正則なので，被積分関数は正則である．したがって，積分経路を C'_-：$|z| = R$ かつ $\mathrm{Re}(z) < 0$ に変化させても積分の値は同じである．すなわち，

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi i}\int_{C_-} g_T(z)e^{zt}\left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)\frac{dz}{z} \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{C'_-} g_T(z)e^{zt}\left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)\frac{dz}{z}
\end{aligned}
$$

となり，この右辺を評価していく．

$$
\begin{aligned}
|g_T(z)| &= \left|\int_0^T f(t)e^{-zt}dt\right| \le \int_0^T |f(t)e^{-zt}|\, dt \\
&\le B\int_0^T e^{-\mathrm{Re}(z)t}\, dt = \frac{-B}{\mathrm{Re}(z)}e^{-\mathrm{Re}(z)T} + \frac{B}{\mathrm{Re}(z)} \\
&< \frac{-B}{\mathrm{Re}(z)}e^{-Re(z)T} \quad \left(\because \frac{B}{\mathrm{Re}(z)} < 0\right)
\end{aligned}
$$

したがって，先ほどと同様に

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{C'_-} g_T(z)e^{zT}\left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)\frac{dz}{z}\right| \\
&\le \frac{1}{2\pi}\int_{C'_-}\left|g_T(z)e^{zT}\left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)\frac{1}{z}\right||dz| \\
&\le \frac{1}{2\pi}\int_{C'_-}\frac{-B}{\mathrm{Re}(z)}e^{-\mathrm{Re}(z)T}\cdot\frac{2e^{\mathrm{Re}(z)T}}{R^2}(-\mathrm{Re}(z))|dz| \\
&= \frac{B}{\pi R^2}\int_{C'_-}|dz| = \frac{B}{\pi R^2}\cdot\pi R = \frac{B}{R}
\end{aligned}
$$

と評価できる．最後に，残った積分

$$
\frac{1}{2\pi i}\int_{C_-} g(z)e^{zT}\left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)\frac{dz}{z}
$$

を考える．
$T\to\infty$ の時 0 に収束することを示す．

有界閉集合 C_- 上で $g(z)\left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)\cdot\frac{1}{z}$，の絶対値には最大値があり，それを M とおく．すると，

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{C_-} g_T(z)e^{zT}\left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)\frac{dz}{z}\right| \\
&\le \frac{M}{2\pi}\int_{C_-} |e^{zT}||dz| \\
&= \frac{M}{2\pi}\int_{C_-} e^{\mathrm{Re}(z)T}\,|dz|
\end{aligned}
$$

となる．
C_- は実軸対象で，被積分関数も

$$
e^{\mathrm{Re}(z)T} = e^{\mathrm{Re}(\bar{z})T}
$$

より，実軸に関する対称性があるため，上半分の積分の 2 倍として計算ができる．

$z=-\delta+i\sqrt{R^2-\delta^2}$ の偏角を λ とおくと，上半面上の C_- は

$$z=Re^{i\theta}\left(\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\lambda\right)$$

$$z=-\delta+it(0\leq t\leq\sqrt{R^2-\delta^2})$$

の２つの部分に分けて書ける．

$$\frac{M}{2\pi}\int_{C_-}e^{\mathrm{Re}(z)T}\,|dz|$$

$$=2\cdot\frac{M}{2\pi}\left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\lambda}e^{(R\cos\theta)T}\,Rd\theta+\int_{\sqrt{R^2-\delta^2}}^{0}e^{-\delta T}\,dt\right)$$

$$=\frac{M}{\pi}\left(\int_0^{-\frac{\delta}{R}}e^{RTt}\,R\,\frac{-1}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{dt}\right.$$

$$\left.-\sqrt{R^2-\delta^2}e^{-\delta T}\right)$$

$$(t=\cos\theta,dt=-\sin\theta d\theta=-\sqrt{1-t^2}d\theta)$$

$$\leq\frac{M}{\pi}\left(\int_{-\frac{\delta}{R}}^{0}e^{RTt}\,R\,\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\delta^2}{R^2}}}\mathrm{dt}-\sqrt{R^2-\delta^2}e^{-\delta T}\right)$$

$$=\frac{M}{\pi}\left(\frac{R}{T}\cdot\frac{1-e^{-\delta T}}{\sqrt{R^2-\delta^2}}\right.$$

$$\left.-\sqrt{R^2-\delta^2}e^{-\delta T}\right)\to 0(T\to\infty)$$

となる．これで

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{C_-}g(z)e^{zt}\left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)\frac{dz}{z}=0$$

が導出された．
以上より，

$$\lim_{T\to\infty}|g(0)-g_T(0)|$$

$$=\lim_{T\to\infty}\left|\frac{1}{2\pi i}\int_c\left(g(z)-g_T(z)\right)e^{zt}\left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)\frac{dz}{z}\right|$$

$$\leq\frac{B}{R}+\frac{B}{R}+0=\frac{2B}{R}$$

が任意の R で成り立つ．R は十分大きな実数で任意なので，

$$\lim_{T\to\infty}|g(0)-g_T(0)|\ =0\qquad\therefore\lim_{T\to\infty}g_T(0)=g(0)$$

$$\therefore\quad\int_0^{\infty}f(t)\,dt=g(0)$$

が成り立つ．

では命題４の証明に戻る．

$$\theta(x)=0(1\leq x<2),$$

$$\theta(x)=\log2(2\leq x<3),$$

$$\theta(x)=\log2+\log3(3\leq x<5)$$

$$\cdots$$

$\mathrm{Re}(s)>1$ に対して，

$$s\int_1^{\infty}\frac{\theta(\chi)}{x^{s+1}}dx=\int_1^2 0dx+\int_2^3\frac{s\log2}{x^{s+1}}dx$$

$$+\int_3^5\frac{s(\log2+\log3)}{x^{s+1}}dx$$

$$+\int_5^7\frac{s(\log2+\log3+\log5)}{x^{s+1}}dx$$

$$+\cdots$$

$$=\left(-\frac{\log2}{3^s}+\frac{\log2}{2^s}\right)$$

$$+\left(-\frac{\log2+\log3}{5^s}\right.$$

$$\left.+\frac{\log2+\log3}{3^s}\right)+\cdots$$

$$=\frac{\log2}{2^s}+\frac{\log3}{3^s}+\frac{\log5}{5^s}+\cdots=\Phi(s)$$

$$\therefore\int_1^{\infty}\frac{\theta(x)}{x^{s+1}}dx=\frac{\Phi(s)}{s}$$

である．
ここで，$f(t)=\theta(e^t)e^{-t}-1$ とおく．すると，

$$g(z)=\int_0^{\infty}f(t)\,e^{-zt}dt$$

$$=\int_0^{\infty}\theta(e^t)\,e^{-(z+1)t}dt-\int_0^{\infty}e^{-zt}dt$$

$$=\int_1^{\infty}\frac{\theta(x)}{x^{z+2}}dx-\int_0^{\infty}e^{-zt}dt=\frac{\Phi(z+1)}{z+1}-\frac{1}{z}$$

$$(x=e^t)$$

$$\left(\because\ \int_1^{\infty}\frac{\theta(x)}{x^{s+1}}dx=\frac{\Phi(s)}{s}\ \right)$$

命題２より $g(z)$ は $\mathrm{Re}(z+1)\geq 1$ つまり $\mathrm{Re}(z)\geq 0$ に正則関数として拡張できる．
また，$f(t)$ は条件より局所可積分である．
さらに命題３より $\theta(e^t)=O(e^t)$ なので，

$$|\theta(e^t)|\leq ke^t$$

$$\therefore\ |f(t)|=|\theta(e^t)e^{-t}-1|\leq|\theta(e^t)e^{-t}|+1$$

$$\leq k+1$$

となる定数 k が存在する．よって有界である．
これで $f(t),g(z)$ は定理の仮定を満たすので，

$$\int_0^\infty f(t)\,dt = \int_0^\infty (\theta(e^t)e^{-t} - 1)dt$$
$$= \int_1^\infty \frac{\theta(x) - x}{x^2} dx \quad \Bigl(x$$
$$= e^t \text{ に置換した}\Bigr)$$

が収束することが示せた.

<u>命題 5 の証明</u>

$$\theta(x) \sim x$$

を証明していく.
命題を否定し,
『ある正数 ε に対し，$1 - \varepsilon < \frac{\theta(x)}{x} < 1 + \varepsilon$ を満たさないいくらでも大きな x が存在する.
すなわち, ある正数εに対し, $\frac{\theta(x)}{x} \leq 1 - \varepsilon$または $1 + \varepsilon \leq \frac{\theta(x)}{x}$ となるいくらでも大きな x が存在する.』
と仮定する.

これを
『ある正数 ε に対し，$1 + \varepsilon \leq \frac{\theta(x)}{x}$ となるいくらでも大きな x が存在する.』 (1)
『ある正数 ε に対し，$\frac{\theta(x)}{x} \leq 1 - \varepsilon$ となるいくらでも大きな x が存在する.』(2)
と分ける．(1) と (2) のどちらの場合でも矛盾が起きれば命題 5が示される.

(1) のとき,

$$\theta(x) \geq (1 + \varepsilon)x$$

が成り立つ.
$\theta(t)$ は非減少関数なので,

$$\theta(t) \geq \theta(x) \geq (1 + \varepsilon)x \quad (t \geq x)$$

となる．よって,

$$\int_x^{(1+\varepsilon)x} \frac{\theta(t) - t}{t^2} dt \geq \int_x^{(1+\varepsilon)x} \frac{(1 + \varepsilon)x - t}{t^2} dt$$

となる．$t = xs$ に置換すると,

$$\int_x^{(1+\varepsilon)x} \frac{(1 + \varepsilon)x - t}{t^2} dt$$
$$= \int_1^{1+\varepsilon} \frac{(1 + \varepsilon)x - xs}{(xs)^2} xds$$
$$= \int_1^{1+\varepsilon} \frac{(1 + \varepsilon) - s}{s^2} ds$$

となる．一方，命題 4 より,

$$\int_x^{(1+\varepsilon)x} \frac{\theta(t) - t}{t^2} dt$$
$$= \int_1^{(1+\varepsilon)x} \frac{\theta(t) - t}{t^2} dt$$
$$- \int_1^x \frac{\theta(t) - t}{t^2} dt$$
$$\to \int_1^\infty \frac{\theta(t) - t}{t^2} dt$$
$$- \int_1^\infty \frac{\theta(t) - t}{t^2} dt \quad (x \to \infty) = 0$$

そのため十分大きな x に対して $\int_x^{(1+\varepsilon)x} \frac{(1+\varepsilon)x - t}{t^2} dt$ の絶対値は任意に小さな値をとる．これは不合理であるので（1）は矛盾.

（2）の場合

$\frac{\theta(x)}{x} \leq 1 - \varepsilon$ となる x をひとつ固定する．すると（1）と同様に評価し置換積分することにより

$$\int_{(1-\varepsilon)x}^x \frac{\theta(t) - t}{t^2} dt \leq \int_{1-\varepsilon}^1 \frac{(1 - \varepsilon) - s}{s^2} ds < 0$$

となる.
一方命題 4 により

$$\int_{(1-\varepsilon)x}^x \frac{\theta(t) - t}{t^2} dt$$
$$= \int_1^x \frac{\theta(t) - t}{t^2} dt$$
$$- \int_1^{(1-\varepsilon)x} \frac{\theta(t) - t}{t^2} dt \to 0$$

であるので大きな x では絶対値が小さい値になり，不合理である.
（1），（2）いずれも矛盾が生じたため命題 5 を否定したことが誤りであったことが分かった．よって命題 5 を示すことができた.

<u>素数定理の証明</u>
命題 4 を用いた素数定理の主張

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$$

つまり

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\pi(x) \log x}{x} = 1$$

を示す.
$\theta(x)$ に登場する $\log p$ をすべて $\log x$ に変えると

$$\theta(x) = \sum_{p \le x} \log p \le \sum_{p \le x} \log x$$

となる．$p \le x$ なる素数 p の個数が $\pi(x)$ なので

$$\theta(x) \le \pi(x)\log x$$

$$\therefore \frac{\pi(x)\log x}{x} \ge \frac{\theta(x)}{x} \to 1 (x \to \infty) \quad \ldots(\#)$$

である.（ここで命題５を用いた.）
次に逆向きの不等式をつくる．任意の小さな正数 ε をひとつとり，$\theta(x)$ に登場する素数を

$$x^{1-\varepsilon} < p \le x$$

の範囲にあるものだけにすると

$$\theta(x) = \sum_{p \le x} \log p \ge \sum_{x^{1-\varepsilon} < p \le x} \log p$$

となる．この範囲で

$$\log p > \log x^{1-\varepsilon}$$

と評価でき，この範囲にある素数の個数は

$$\pi(x) - \pi(x^{1-\varepsilon})$$

である．よって，

$$\theta(x) = \sum_{p \le x} \log p \ge \sum_{x^{1-\varepsilon} < p \le x} \log x^{1-\varepsilon}$$

$$= (1-\varepsilon)\{\pi(x) - \pi(x^{1-\varepsilon})\}\log x$$

$$\therefore \frac{\pi(x)\log x}{x} \le \frac{1}{1-\varepsilon} \cdot \frac{\theta(x)}{x} + \pi(x^{1-\varepsilon})\frac{\log x}{x}$$

が成り立つ．ここで

$$\pi(x^{1-\varepsilon}) \le x^{1-\varepsilon}$$

なので

$$\frac{\pi(x)\log x}{x} \le \frac{1}{1-\varepsilon} \cdot \frac{\theta(x)}{x} + \frac{\log x}{x^{\varepsilon}}$$

が成り立つ．さらに

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x^{\varepsilon}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{\log x^{\varepsilon}}{x^{\varepsilon}} = \frac{1}{\varepsilon} \cdot 0 = 0$$

と命題５から

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{1-\varepsilon} \cdot \frac{\theta(x)}{x} + \frac{\log x}{x^{\varepsilon}} \right) = \frac{1}{1-\varepsilon}$$

となる．ε が任意なのでこれと（＃）を合わせると，

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)\log x}{x} = 1$$

となる．

謝辞

本論文を作成するにあたり，京都大学大学院理学研究科数学教室の森脇淳教授と山崎美幸さんから，丁寧かつ熱心なご指導を賜りました．ここに感謝の意を表します．